

CHƯƠNG III

HỌC LẬP C KHÔNG GIAN

Bài 9. VÉC TƠ CHÍNH VÀ VECTƠ MÔMEN CHÍNH CỦA HỌC LẬP C KHÔNG GIAN

I. Vectơ chính của học lập c không gian

Cho học lập c không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$

- Định nghĩa: Vectơ chính của học lập c, ký hiệu $\vec{R}'$, là vectơ tổng của các vectơ học lập c của học lập c:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (9.1)$$

- Xác định vectơ chính: Có thể dùng phương pháp vẽ đa giác học lập c. Trong trường hợp này đa giác học lập c là đa giác khép kín.

Cũng có thể xác định vectơ chính qua các hình chiếu của nó trên ba trục tọa độ vuông góc theo các công thức sau:

$$\left. \begin{aligned} R'_x &= \bar{F}_{1x} + \bar{F}_{2x} + \dots + \bar{F}_{ix} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} \\ R'_y &= \bar{F}_{1y} + \bar{F}_{2y} + \dots + \bar{F}_{iy} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy} \\ R'_z &= \bar{F}_{1z} + \bar{F}_{2z} + \dots + \bar{F}_{iz} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iz} \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z}; \quad \cos \alpha = \frac{R'_x}{R'};$$

$$\cos \beta = \frac{R'_y}{R'}; \quad \cos \gamma = \frac{R'_z}{R'};$$

Trong đó α, β, γ là góc hợp bởi $\vec{R}'$ và các trục Ox, Oy, Oz

II. Mômen chính của học lập c không gian đối với i mômen trục

1. Mômen của mômen học lập c đối với i mômen trục

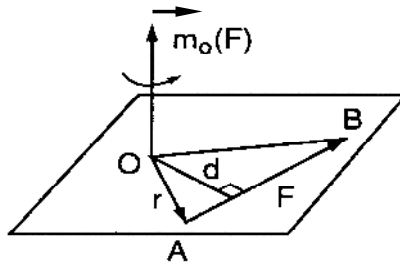
Mômen của học lập c $\vec{F}$ đối với i mômen trục O , ký hiệu $\vec{m}_O(\vec{F})$ là vectơ có:

Phương: vuông góc với i mômen trục qua O và chứa $\vec{F}$.

Chiều: Nhìn từ đầu mút xu hướng thùy $\vec{F}$ quay ngược chiều kim đồng hồ quanh O .

Trị số: bằng tích số của giá trị học lập c với cánh tay đòn của học lập c đối với i mômen trục O , $\vec{m}_O(\vec{F}) = Fd$ (hình 9.1)

Đơn vị: Nm



H9 - 1

Dễ dàng thấy rằng vectơ mômen của lực đối với một điểm không thay đổi khi lực trượt trên đường tác dụng của nó và vị trí tiêu khi lực $\vec{F}$ đi qua điểm lấy mômen ($d = 0$). Trượt của mômen bằng 2 lần diện tích tam giác ΔOAB (A là điểm đặt của lực, B là điểm mút của vectơ lực)

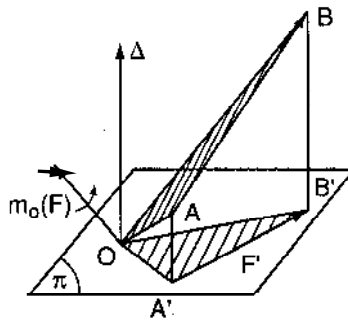
Từ đó suy ra: Vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O bằng tích có hướng của vectơ định vị điểm đặt lực $\vec{r} = \vec{OA}$ với vectơ lực $\vec{F}$:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (9.3)$$

2. Mômen của một lực đối với một trục

Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ , ký hiệu $\vec{m}_\Delta(\vec{F})$ là mômen đối của lực $\vec{F}$ đối với điểm O , ở đó $\vec{F}'$ là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng π vuông góc với trục Δ , còn O là giao điểm của trục Δ với mặt phẳng π (hình 9.2):

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}') = F'd \quad (9.4)$$



H9 - 2

Rõ ràng khi $F = 0$ hoặc khi $\vec{F}$ song song hay cắt trục Δ (lực và trục đồng phẳng) thì $\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$.

3. Định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với một điểm và mômen của lực đối với một trục (định lý 9 – 1)

Định lý 9 – 1: Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng hình chiếu trên trục Δ của vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục.

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = h \text{ch}_\Delta[\vec{m}_O(\vec{F})] \quad (9.5)$$

Áp dụng công thức (9.5) cho trục Δ là trục Ox, Oy, Oz mômen của lực $\vec{F}$ đối với ba trục là $\vec{m}_x(\vec{F}), \vec{m}_y(\vec{F}), \vec{m}_z(\vec{F})$, còn hình chiếu mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O trên ba trục là $\vec{m}_{Ox}(\vec{F}), \vec{m}_{Oy}(\vec{F}), \vec{m}_{Oz}(\vec{F})$ ta có:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) \begin{cases} \vec{m}_{Ox}(\vec{F}) = \vec{m}_x(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oy}(\vec{F}) = \vec{m}_y(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oz}(\vec{F}) = \vec{m}_z(\vec{F}) \end{cases} \quad (9.6)$$

Vậy có thể thay thế việc tính hình chiếu trên mặt trục của vectơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với mặt điếm O bằng tính mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục đó.

4. Mômen chính của hệ lực không gian đối với mặt điếm

Vectơ mômen chính của hệ lực không gian đối với điếm O, ký hiệu $\vec{m}^O$, là mặt vectơ bằng tổng hình học các vectơ mômen của các lực đối với điếm O.

$$\vec{m}^O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) \quad (9.7)$$

Vectơ mômen chính có thể dùng để xác định bằng phương pháp đa giác vectơ (tổng đa giác lực, đó vectơ lực được thay thế bằng các vectơ mômen của lực), nhờ thuận tiện hơn, ta xác định các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ theo (9.6)

$$\vec{m}^O = \begin{cases} \vec{m}^{Ox} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Ox}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_x(\vec{F}_i) \\ \vec{m}^{Oy} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Oy}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_y(\vec{F}_i) \\ \vec{m}^{Oz} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{Oz}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_z(\vec{F}_i) \end{cases} \quad (9.8)$$

Từ đó dễ dàng xác định giá trị và phương chiếu của vectơ mômen chính

5. Nhận xét

- Mômen chính của hệ lực đồng quy đối với điếm đồng quy bằng không.
- Mômen chính của hệ ngẫu đối với bất kỳ điếm nào cũng bằng vectơ ngẫu lực tổng:

$$\vec{m}^O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \quad (9.9)$$

- Vectơ chính là vectơ tự do, còn vectơ mômen chính thay đổi theo điếm lấy mômen:

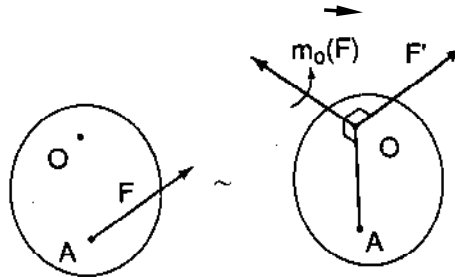
$$\vec{m}^{O_1} = \vec{m}^O + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}'_O) \quad (9.10)$$

Bài 10. THU GỌI N HẸP LẠI C KHÔNG GIAN

1. Đỉnh là c d i l c song song

Lực $\vec{F}$ đặt tại A tạo nên động năng và tác động của nó tại O (lực $\vec{F}'$) và moment động lượng của nó có vectơ moment động lượng của lực $\vec{F}$ đặt tại vị trí điểm O (hình 10-1)

$$\vec{F} \sim [\vec{F}' \text{ v\`a } \vec{m} = \vec{m}_{O_1}(\vec{F})] \quad (10.1)$$



H10 – 1

Chúng mình định lý này giúp chúng mình cho thấy rằng hợp hàm là c
phần, khi thay thế mômen đối số bằng véctơ mômen.

2. Thu gñ n hñ lñ c không gian vñ mñ t tâm

Lấy một điểm O tùy ý, gọi là tâm thu gọn. Số đường kính lý do là song song với các trục tâm O (10.2)

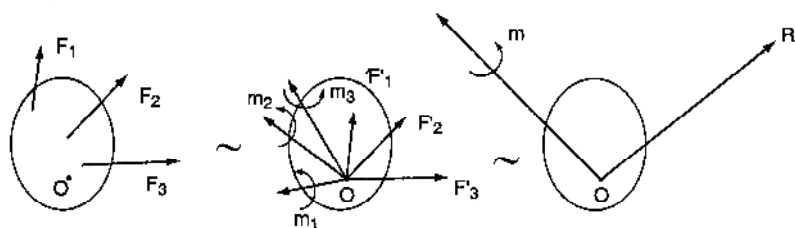
$$\vec{F}_1 \sim [\vec{F}_1 \text{ v\`a } \vec{m}_1 = \vec{m}_0(\vec{F}_1)]$$

$$\vec{F}_2 \sim [\vec{F}_2' \text{ v\`a } \vec{m}_2 = \vec{m}_0(\vec{F}_2)]$$

.....

$$\vec{F}_n \sim \left[\vec{F}'_n \text{ và } \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n) \right]$$

Nh $\square$ v $\square$ y thu g $\square$ n h $\square$ l $\square$ c $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ v $\square$ t $\square$ m O, ta đ $\square$ $\square$ c m $\square$ t h $\square$ l $\square$ c đ $\square$ ng quy (kh $\square$ ng gian) t $\square$ i O: $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n')$ v $\square$ m $\square$ t h $\square$ ng $\square$ u l $\square$ c (kh $\square$ ng gian): $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$



H10-2

Hệ trục quy có gốc tại O, kí hiệu $\vec{R}'_O$ được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ trục đã cho đặt tại O (vectơ chính của hệ trục quy tại O và vectơ

chính của hệ đã cho bằng nhau).

$$\vec{R}'_O \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}' \quad (10.2)$$

trong đó $\vec{R}'$ là vectơ chính của hệ đã cho.

Hệ ngoại lực không gian $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$, tác động đồng thời lên vật có $\vec{m}$:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) \\ \vec{m} &= \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \vec{m}_O \end{aligned} \quad (10.3)$$

Định lý 10 – 1: Hệ lực không gian tác động đồng thời lên vật rắn và một ngoại lực đặt tại một điểm tùy ý, chúng đồng giá trị là lực thu gọn và ngoại lực thu gọn. Lực thu gọn đặt tại tâm thu gọn có vectơ bằng vectơ chính của hệ lực, còn ngoại lực thu gọn có vectơ mômen bằng vectơ mômen chính của hệ lực đặt tại tâm thu gọn.

Nhận xét:

1. Phương chiều và giá trị của lực thu gọn không phụ thuộc vào tâm thu gọn. Số biến đổi của ngoại lực thu gọn theo tâm thu gọn phù hợp với công thức (9.10)
2. Đặt vị hệ lực không gian, lực thu gọn không nằm trong mặt phẳng của ngoại lực thu gọn như trường hợp hệ lực phẳng (tức vectơ chính và vectơ mômen chính không vuông góc với nhau như trong trường hợp hệ lực phẳng). Đây là sự khác biệt cơ bản giữa hệ lực không gian và hệ lực phẳng.

Bài 11. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG**I. Điều kiện cân bằng**

Định lý 11 – 1: Điều kiện cân bằng và điều kiện học lập không gian cân bằng là vectơ chính và vectơ mômen chính của học lập đối với mọi điểm bất kỳ triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \\ \vec{m}_O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (11 - 1)$$

Chứng minh: Điều kiện cân bằng được chứng minh đưa vào dòng thu gọn của học lập không gian. Thước vậy nếu điều kiện (11 - 1) không được thỏa mãn thì học lập đã cho thu vào mọi trường hợp: ngẫu nhiên, học lập học hoặc mọi trường hợp và mọi trường hợp. Dễ dàng chứng minh rằng không có mọi trường hợp nào trong đó thỏa mãn tiên đề 1 về cân bằng.

Điều kiện được là hiển nhiên vì tất cả vectơ chính bằng không, học lập thu vào mọi trường hợp có mômen bằng mômen chính của học lập đối với tâm thu gọn, nó bằng không thì chứng minh ngẫu nhiên học lập thu gọn là hai học lập cân bằng.

II. Các phương trình cân bằng của học lập không gian

Để vectơ chính và vectơ mômen chính triệt tiêu thì các hình chiếu của chúng trên ba trục tọa độ vuông góc phải triệt tiêu:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \\ \sum_{i=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{m}_z(\vec{F}_i) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (11 - 2)$$

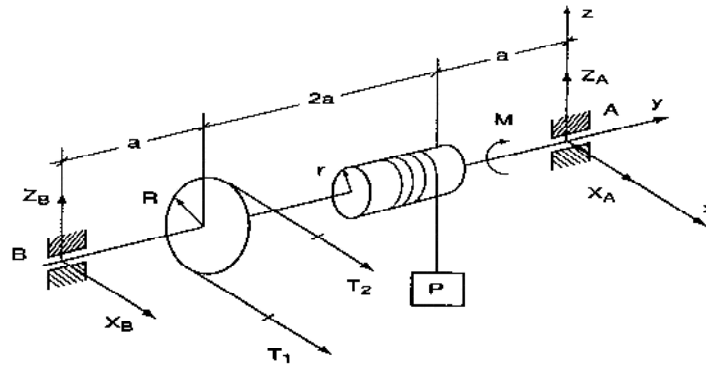
Định lý 11 – 2 : Điều kiện cân bằng và điều kiện học lập không gian cân bằng là từng hình chiếu của các học lập trên ba trục vuông góc và từng mômen của các học lập đối với ba trục cũng đều triệt tiêu.

Các phương trình 11 – 2 được gọi là các phương trình cân bằng của học lập không gian.

Từ 11 – 2 có thể suy ra các phương trình cân bằng của các học lập được biết: Học lập được quy không gian; học ngẫu nhiên học lập không gian; học lập song song không gian. Đối với các học lập này số phương trình cân bằng giảm xuống còn ba phương trình.

Ví dụ : Một trục kéo AB có đầu trục nằm ngang và được đặt trên hai trục (bên trục) A và B. Hai nhánh đai có puli có đường kính $D = 0,6m$ chụm các học lập căng $T_1 = 5kN$, $T_2 = 2kN$. Vật được kéo có trọng lượng $P = 5kN$ và tang treo có đường kính $d = 0,3m$. Trục treo chịu tác động của ngẫu nhiên học lập có mômen M .

Xác định ngẫu nhiên học lập cần thiết để trục cân bằng và các phần học lập tại các trục A và B. Bỏ qua ma sát, các kích thước cho trên hình vẽ.



Giải: Trục cân bằng đồng thời tác động của hai trục:

$$(\vec{P}, \vec{M}, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B) \approx 0$$

Với trục tọa độ như hình vẽ các phương trình cân bằng của hai trục có dạng:

$$\sum \bar{F}_x = T_1 + T_2 + X_A + X_B = 0$$

$$\sum \bar{F}_z = -P + Z_A + Z_B = 0$$

$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}) = aP - 4aZ_B = 0$$

$$\sum \bar{m}_y(\vec{F}) = T_1 \frac{D}{2} - T_2 \frac{D}{2} - P \frac{d}{2} - M = 0$$

$$\sum \bar{m}_z(\vec{F}) = 3aT_1 + 3aT_2 + 4aX_B = 0$$

Thay các giá trị bằng số vào hai phương trình trên và giải ra ta nhận được:

$$X_A = -1,75 \text{ kN}; \quad Z_A = 3,75 \text{ kN}; \quad X_B = -5,25 \text{ kN}$$

$$Z_B = 1,25 \text{ kN}; \quad M = 0,15 \text{ kN}$$

Đây thành phần X_A và X_B có chiều ngược lại so với chiều trên hình vẽ.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa vectơ chính của hai trục không gian? Công thức xác định 3 hình chiếu của vectơ chính trên ba trục vuông góc?
2. Định nghĩa mômen chính đối với một điểm của hai trục không gian? Công thức xác định ba hình chiếu của vectơ mômen chính đối với một điểm của hai trục vuông góc?
3. Nêu các phương trình cân bằng của hai trục không gian?